

# IML でも CML でもない 直観主義様相論理について

---

佐藤雄太

第 60 回 MLG 数理論理学研究集会 (神戸大学, 2025/12/20)

神戸大学大学院 システム情報学研究科 情報数理研究室

直観主義様相論理の分野は，それぞれの研究者が「直観主義の様相論理」に求める要素の違いから，IML (Intuitionistic Modal Logic) と CML (Constructive Modal Logic) という二つの勢力に分かれている．

現在，直観主義様相論理の分野全体の状況を俯瞰するようなサーベイを行っている．その過程で遭遇した，どちらの勢力にも属さないような論理について発表する．

[cannorin.net/math/mlg60.pdf](http://cannorin.net/math/mlg60.pdf)



古典様相論理 **K** と直観主義論理 **Int**

Intuitionistic Modal Logic と Constructive Modal Logic

IML でも CML でもない論理

# 古典様相論理 $K$ と直観主義論理 $Int$

---

- 命題変数全体の集合  $\text{PropVar} = \{p, q, \dots\}$
- 命題論理の言語  $\mathcal{L}_p := \text{PropVar} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$
- 様相論理の言語  $\mathcal{L}_{\Box\Diamond} := \mathcal{L}_p \cup \{\Box, \Diamond\}$
- $\top$  は  $\perp \rightarrow \perp$  の略記,  $\neg\varphi$  は  $\varphi \rightarrow \perp$  の略記,  
 $\varphi \leftrightarrow \psi$  は  $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$  の略記とする

- **CI** を古典命題論理とする
- 直観主義命題論理 **Int** は **CI** から排中律を除いて得られる
- 様相論理 **K** は **CI** に  $M_{\Box}$ ,  $N_{\Box}$ ,  $C_{\Box}$ ,  $Dual_{\Box}$  を加えて得られる
  - これらの代わりに  $M_{\Diamond}$ ,  $N_{\Diamond}$ ,  $C_{\Diamond}$ ,  $Dual_{\Diamond}$  を加えてもよい

$M_{\Box}$	$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\Box\varphi \rightarrow \Box\psi}$	$M_{\Diamond}$	$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\psi}$
$N_{\Box}$	$\Box\top$	$N_{\Diamond}$	$\neg\Diamond\perp$
$C_{\Box}$	$(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$	$C_{\Diamond}$	$\Diamond(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$
$Dual_{\Box}$	$\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$	$Dual_{\Diamond}$	$\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$

(後の都合で, K 公理・Nec 規則ではなく上記を使う)

**K** も **Int** も Kripke 意味論をもつ:

## Definition

- $\mathfrak{F} = (W, R)$  は Kripke フレーム  
: $\iff W \neq \emptyset, R \subseteq W \times W$
- $\mathfrak{M} = (W, R, V)$  は Kripke モデル  
: $\iff (W, R)$  が Kripke フレーム,  $V : \text{PropVar} \rightarrow \mathcal{P}(W)$

**K** と **Int** では  $R$  と  $V$  に関する条件が異なり, 充足可能性も異なるものを用いる (次頁).

K では  $R$  を任意の関係  $\sqsubset$  とし,  $V$  にも特に条件を課さない.

## Definition (K-Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \sqsubset, V)$  に対し,  $\Vdash_{\mathfrak{M}}^K$  を以下で定める:

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K p :\iff x \in V(p)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi \wedge \psi :\iff x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi \ \& \ x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \psi$
- ...
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \Box \varphi :\iff \forall y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \Diamond \varphi :\iff \exists y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi)$

# Int の Kripke 意味論

Int では  $R$  を任意の推移的・反射的な関係  $\leq$  とする.

また  $V$  に以下の条件を課す:

$$x \leq x' \ \& \ x \in V(p) \implies x' \in V(p)$$

## Definition

上を満たすものを 直観主義フレーム・モデル と呼ぶことにする

## Definition (Int-Satisfaction Relation)

直観主義モデル  $\mathfrak{M} = (W, \leq, V)$  に対し,  $\Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}}$  を以下で定める:

$$x \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi \rightarrow \psi : \Longleftrightarrow \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \psi)$$

## Fact (Persistence)

$$x \leq x' \ \& \ x \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi \implies x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi.$$

## Definition (Validity)

- $\mathfrak{M} \models^\bullet \varphi \iff \forall x \in W (x \Vdash_{\mathfrak{M}}^\bullet \varphi)$
- $\mathfrak{F} \models^\bullet \varphi \iff \forall V ((\mathfrak{F}, V) \models^\bullet \varphi)$
- Kripke フレームのクラス  $\mathcal{C}$  に対して,  
$$\mathcal{V}(\Vdash^\bullet, \mathcal{C}) := \{\varphi \mid \forall \mathfrak{F} \in \mathcal{C} (\mathfrak{F} \models^\bullet \varphi)\}$$

## Fact (Completeness)

- $\mathbf{K} = \mathcal{V}(\Vdash^K, \mathcal{C}_K)$ .  $\mathcal{C}_K$  は Kripke フレーム全体のクラス.
- $\mathbf{Int} = \mathcal{V}(\Vdash^{\mathbf{Int}}, \mathcal{C}_{\mathbf{Int}})$ .  $\mathcal{C}_{\mathbf{Int}}$  は直観主義フレーム全体のクラス.

# Intuitionistic Modal Logic と Constructive Modal Logic

---

$\mathbf{K}$  の直観主義版を考えたい。そのモデルは Kripke モデルと直観主義モデルの fusion となるだろう。

## Definition

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$  が以下を満たすとき Fusion モデル と呼ぶ:

- $(W, \leq, V)$  が直観主義モデル, すなわち  $\leq$  は推移的かつ反射的で,  $x \leq x' \ \& \ x \in V(p) \Rightarrow x' \in V(p)$ .
- $(W, \sqsubset, V)$  が Kripke モデル.

Fusion フレームについても同様に定める。

これに対しても充足可能性を定めたい。

# Extrinsic Satisfaction Relation (1/2)

まず素朴に  $\Vdash^K$  と  $\Vdash^{\text{Int}}$  を組み合わせたものを考えよう.

## Definition (Extrinsic Satisfaction Relation)

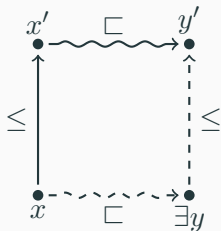
$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$  を Fusion モデルとする.

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi \rightarrow \psi :\iff \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \psi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \Box \varphi :\iff \forall y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \Diamond \varphi :\iff \exists y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi)$

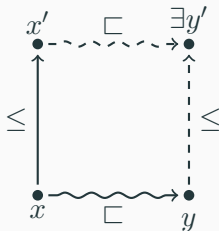
$\Vdash^e$  は必ずしも persistency を持たず, 別途  $\mathfrak{M}$  にフレーム条件を加えてやる必要がある (次頁). persistency をフレーム条件で外付けするので 外部的充足可能性 (extrinsic-) と呼ぶことにする.

## Extrinsic Satisfaction Relation (2/2)

$\models^e$  は必ずしも persistency を持たず，別途  $\mathfrak{M}$  にフレーム条件を加えてやる必要がある．



□-p 条件



◇-p 条件

□-p 条件が □-論理式 の persistency を，  
◇-p 条件が ◇-論理式 の persistency を保証する．

# Intrinsic Satisfaction Relation

フレーム条件で外付けするのではなく，充足可能性の定義自体を変えることで persistency を内蔵するアプローチもあり，これを内部的充足可能性 (intrinsic) と呼ぶことにする．

## Definition (Intrinsic Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$  を Fusion モデルとする．

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi \rightarrow \psi :\iff \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \psi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \Box \varphi :\iff \forall x' \geq x \forall y' \sqsubset x' (y' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \Diamond \varphi :\iff \forall x' \geq x \exists y' \sqsubset x' (y' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi)$

$\Box/\Diamond$  でも直観主義側の到達可能関係  $\leq$  を見ることによって，何もフレーム条件を加えなくても persistency が保証される．

# Intrinsic vs. Extrinsic

$\Vdash^e$  と  $\Vdash^i$  がそれぞれ妥当とする論理式の集合は 一致しない.

## Definition

- $\mathcal{C}_f$ : Fusion フレーム全体のクラス.
- $\mathcal{C}_{\text{box-p}}$ :  $\Box$ -p 条件を満たす Fusion フレーム全体のクラス.
- $\mathcal{C}_{\text{dia-p}}$ :  $\Diamond$ -p 条件を満たす Fusion フレーム全体のクラス.

## Proposition

$$\mathcal{V}(\Vdash^i, \mathcal{C}_f) \subsetneq \mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

## Proof.

例えば以下の論理式が右辺に含まれ、また左辺に含まれない.

$$C_{\Diamond} : \Diamond(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \quad \square$$

# Constructive Modal Logic

Wijesekera, Mendler & de Paiva らは構成主義の観点から  $C_\Diamond$  自体を疑問視し、Constructive Modal Logic (CML) を作った。  
代表的な CML として **CK** (今回は触れない) や **WK** がある:

## Definition (WK)

$$\mathbf{WK} := \mathbf{Int} + M_\Box + N_\Box + C_\Box + M_\Diamond + N_\Diamond + \mathbf{FS1}.$$

ここで  $\mathbf{FS1} := \Diamond(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Diamond\psi)$ .

彼らは  $\Vdash^i$  を充足可能性として採用した。

## Fact (Wijesekera 1990)

$$\mathbf{WK} = \mathcal{V}(\Vdash^i, \mathcal{C}_f).$$

## Simpson の 6 条件

一方 Fischer Servi, Ewald, Plotkin & Stirling, Simpson らは「真の直観主義版  $K$ 」といえるものを追い求めた。

Simpson は特に直観主義一階述語論理 (iFOL) との対応を重視し、 $\Box$  には  $\forall$  的な,  $\Diamond$  には  $\exists$  的な性質を求めた。

- $\Box$  と  $\Diamond$  が独立 (not interdefinable) であるべきで、つまり  $\text{Dual}_{\Box}$  も  $\text{Dual}_{\Diamond}$  も定理として持つべきでない。
- 排中律を加えると古典版の  $K$  が得られるべき。
- 標準翻訳で iFOL とぴったり対応するべきで、少なくとも  $\Box\neg\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\varphi$  と  $\Diamond\neg\varphi \rightarrow \neg\Box\varphi$  を定理として持つべき。

さらに 3 つの条件 \* を加えたものを Simpson の 6 条件 と呼ぶ。

---

\*今回登場する論理は全て満たすので特に触れない

# Intuitionistic Modal Logic (1/3)

Simpson は以下の理由から「**WK** は真の直観主義版 **K** とはいえない」と批判した:

- **WK**  $\not\models \neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$  である.
- **WK** に排中律を加えても古典版の **K** が得られない.

一方 Simpson の 6 条件をすべて満たす論理として **IK** がある:

## Definition

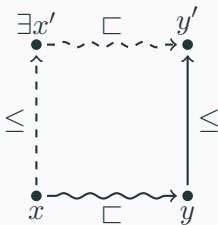
$$\mathbf{IK} := \mathbf{WK} + C_{\Diamond} + \text{FS2}.$$

ここで  $\text{FS2} := (\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$ .

**IK** やその拡張は Intuitionistic Modal Logic (IML) と呼ばれる.

## Intuitionistic Modal Logic (2/3)

FS2 :  $(\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$  がまさに  $\neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$  に必要な公理で、これは以下のフレーム条件に対応する.



### Definition

$\mathcal{C}_{fs2}$ : 上を満たす Fusion フレーム全体のクラス.

## Intuitionistic Modal Logic (3/3)

そして彼らは  $\Box$ -論理式 については persistency を内蔵し、  
 $\Diamond$ -論理式 についてはフレーム条件で persistency を外付けする、  
 $\Vdash^i$  と  $\Vdash^e$  のハイブリッドのような充足可能性を用いた。

### Definition (Hybrid Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$  を Fusion モデルとする。

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi \rightarrow \psi :\iff \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \psi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \Box \varphi :\iff \forall x' \geq x \forall y' \sqsubset x' (y' \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \Diamond \varphi :\iff \exists y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi)$

### Fact (Fischer Servi 1984, Simpson 1994)

$$\mathbf{IK} = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{fs2}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

	WK	IK
充足可能性 フレームのクラス	$\Vdash^i$ $\mathcal{C}_f$	$\Vdash^h$ $\mathcal{C}_{fs2} \cap \mathcal{C}_{dia-p}$
$C_\diamond$ を	もたない	もつ
$\Box$ と $\diamond$ が $\neg \diamond \varphi \rightarrow \Box \neg \varphi$ が 排中律で <b>K</b> に	独立 示せない ならない	独立 示せる なる

- 構成主義の観点から公理  $C_\diamond$  を疑問視する  $\Rightarrow$  CML
- 標準翻訳で iFOL と対応することを重視する  $\Rightarrow$  IML
- 両者の要求は両立しない
- 一般に IML は CML の拡張になる (e.g.  $WK \subsetneq IK$ )

直観主義様相論理の状況を見た上で、以下の疑問が浮かぶ:

## Problem

古典様相論理に慣れていると、 $\Vdash^e$  ではなぜダメなのかと思う.  
論理  $\mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$  は実際どうなっていて,  
本当に Simpson の 6 条件を満たさないのか?

## Problem

$\Vdash^h$  の persistency には  $\Diamond$ -p 条件だけあればよいはず.  
論理  $\mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$  は実際どうなっているのか?

これらの論理を調べると、IML とも CML とも言いがたいことが  
分かった.

IML でも CML でもない論理

---

## $\Vdash^h$ と $\Vdash^e$ が同値になる条件

実は  $\Box\text{-p}$  条件を課せば  $\Vdash^h$  と  $\Vdash^e$  が同値になる:

### Proposition

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \Box, V)$  が  $\Box\text{-p}$  と  $\Diamond\text{-p}$  を満たすならば,  
任意の  $x \in W$ ,  $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box\Diamond}$  で  $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi \iff x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi$ .

### Corollary

$$\mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\Box\text{-p}} \cap \mathcal{C}_{\Diamond\text{-p}}) = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\Box\text{-p}} \cap \mathcal{C}_{\Diamond\text{-p}}).$$

よってまず  $\mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\Diamond\text{-p}})$  を公理化し、カノニカルモデルを与えて議論してから、そこに何か公理を足すことで、カノニカルモデルに  $\Box\text{-p}$  条件を強制できないか考えることにした。

## FIK (1/2)

**IK** から公理 FS2 を取り除いて得られる論理  $\mathbf{IK}^- := \mathbf{WK} + C_\Diamond$  がいかにも  $\mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$  の公理化になっていそうだが、実はそうではないことが最近 Balbiani et al. によって示された。

### Definition

$$\mathbf{FIK} := \mathbf{IK}^- + \text{wCD}.$$

ここで  $\text{wCD} := \Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\Diamond\varphi \rightarrow \Box\psi) \rightarrow \Box\psi)$ .

### Theorem (Balbiani et al. 2024)

$$\mathbf{FIK} = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

### Proof.

( $\subseteq$ ) 簡単. ( $\supseteq$ ) カノニカルモデルを与える。 □

FIK は IK より真に弱い論理になる:

**Proposition (Balbiani et al. 2024)**

$$\mathbf{FIK} \subsetneq \mathbf{IK}.$$

公理 wCD は公理 FS2 を弱めたものといえる.

さらに以下が成立する.

**Proposition (Balbiani et al. 2024)**

FIK に排中律を加えると K が得られる.

**Proposition (S.)**

$$\mathbf{FIK} \not\models \neg \Diamond \varphi \rightarrow \Box \neg \varphi.$$

よって FIK は標準翻訳で iFOL と対応しないことになる.

Balbani らの **FIK** と，そのカノニカルモデルの構成を元にして， $\mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$  の公理化を得ることができた．

## Definition

$$\mathbf{eIK}^- := \mathbf{IK}^- + \mathbf{CD}.$$

ここで  $\mathbf{CD} := \Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \Box\psi)$ .

## Theorem (S.)

$$\mathbf{eIK}^- = \mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

## Proof.

まずカノニカルモデルを用いて  $\mathbf{eIK}^- = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$  を示す．  
そして  $\Box$ -p を満たすモデルで  $\Vdash^h$  と  $\Vdash^e$  が一致することを使う．  $\square$

公理 CD:  $\Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \Box\psi)$  は明らかに公理 wCD:  
 $\Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\Diamond\varphi \rightarrow \Box\psi) \rightarrow \Box\psi)$  の強化で、以下が示せる.

### Proposition (S.)

$$FIK \subsetneq eIK^-.$$

しかし公理 FS2 :  $(\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$  とは比較不能.

### Proposition (S.)

$$eIK^- \subseteq IK \text{ でも } IK \subseteq eIK^- \text{ でもない.}$$

その他の性質については、概ね **FIK** と同様になっている.

### Proposition (S.)

- $eIK^-$  に排中律を加えると **K** が得られる.
- $eIK^- \not\vdash \neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$ .

## 結論 (1/2)

	WK	FIK	IK	eIK <sup>-</sup>
充足可能性 フレームのクラス	$\Vdash^i$ $\mathcal{C}_f$	$\Vdash^h$ $\mathcal{C}_{\text{dia-p}}$	$\Vdash^h$ $\mathcal{C}_{\text{fs2}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}$	$\Vdash^e$ $\mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}$
$C_\diamond$ を	もたない	もつ	もつ	もつ
$\Box$ と $\diamond$ が $\neg\diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$ が 排中律で <b>K</b> に	独立 示せない ならない	独立 示せない なる	独立 示せる なる	独立 示せない なる

FIK と eIK<sup>-</sup> は  $C_\diamond$  をもつという意味で CML とは言えない。  
 一方  $\neg\diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$  が示せず、よって標準翻訳で iFOL と対応しないので、その意味で IML とも言えない。

- CML の要求も IML の条件も満たさない論理 **FIK** が、ちょうど **WK** と **IK** の間に割って入るようにして存在する.
- $\Box$  と  $\Diamond$  を古典様相論理と同様に  $\Box$  のみで評価すると, **IK** と比較不能な **FIK** の拡張である **eIK** が得られ, 同様に CML の要求も IML の条件も満たさない.
- Simpson の 6 条件では「排中律を加えて **K** が得られる」と「標準翻訳で iFOL と対応する」が分けられているが, 実際に前者のみしか満たさない例が複数取れた.

ありがとうございました

[cannorin.net/math/mlg60.pdf](http://cannorin.net/math/mlg60.pdf)



## 補遺・参考文献

---

## Definition

述語  $\sqsubset$  と述語  $V_p$  ( $p \in \text{PropVar}$ ) を持つ一階言語  $\mathcal{L}_{\text{ST}}$  を考える。  
 $\varphi \in \mathcal{L}_{\sqsubset\Diamond}$  と自由変数  $x$  に対して  $\text{ST}_x(\varphi) \in \mathcal{L}_{\text{ST}}$  を以下で定める。

- $\text{ST}_x(\perp) = \perp, \text{ST}_x(p) = V_p(x)$
- $\text{ST}_x(\psi_1 \odot \psi_2) = \text{ST}_x(\psi_1) \odot \text{ST}_x(\psi_2)$  ( $\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ )
- $\text{ST}_x(\Box\psi) = \forall y (x \sqsubset y \rightarrow \text{ST}_y(\psi))$  ( $y$ : fresh)
- $\text{ST}_x(\Diamond\psi) = \exists y (x \sqsubset y \wedge \text{ST}_y(\psi))$  ( $y$ : fresh)

## Fact

$\mathbf{K} \vdash \varphi \iff$  全ての古典  $\mathcal{L}_{\text{ST}}$ -構造で  $\forall x \text{ST}_x(\varphi)$  が妥当

Simpson はこれと同様な対応を IML と iFOL の間に求めた。

今回の発表は、未発表のサーベイ論文を元に行っている。

- Gisèle Fischer Servi. Axiomatizations for some intuitionistic modal logics. *Rendiconti del Seminario Matematico*, 42(3):179–194, 1984.
- Duminda Wijesekera. Constructive modal logics I. *Annals of Pure and Applied Logic*, 50(3):271–301, 1990.
- Alex K. Simpson. The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic. PhD thesis, University of Edinburgh, 1994.
- Michael Mendler and Valeria de Paiva. Constructive CK for Contexts. *Context Representation and Reasoning*, 13, 2005.
- Philippe Balbiani, Han Gao, Çiğdem Gencer, and Nicola Olivetti. A Natural Intuitionistic Modal Logic: Axiomatization and Bi-Nested Calculus. *LIPICs*, 88:13:1–13:21, 2024.