

IML でも CML でもない 直観主義様相論理について

佐藤雄太

第 60 回 MLG 数理論理学研究集会 (神戸大学, 2025/12/20)

神戸大学大学院 システム情報学研究科 情報数理研究室

直観主義様相論理の分野は，それぞれの研究者が「直観主義の様相論理」に求める要素の違いから，IML (Intuitionistic Modal Logic) と CML (Constructive Modal Logic) という二つの勢力に分かれている．

現在，直観主義様相論理の分野全体の状況を俯瞰するようなサーベイを行っている．その過程で遭遇した，どちらの勢力にも属さないような論理について発表する．

cannorin.net/math/mlg60.pdf



古典様相論理 **K** と直観主義論理 **Int**

Intuitionistic Modal Logic と Constructive Modal Logic

IML でも CML でもない論理

古典様相論理 K と直観主義論理 Int

- 命題変数全体の集合 $\text{PropVar} = \{p, q, \dots\}$
- 命題論理の言語 $\mathcal{L}_p := \text{PropVar} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$
- 様相論理の言語 $\mathcal{L}_{\Box\Diamond} := \mathcal{L}_p \cup \{\Box, \Diamond\}$
- \top は $\perp \rightarrow \perp$ の略記, $\neg\varphi$ は $\varphi \rightarrow \perp$ の略記,
 $\varphi \leftrightarrow \psi$ は $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ の略記とする

- **CI** を古典命題論理とする
- 直観主義命題論理 **Int** は **CI** から排中律を除いて得られる
- 様相論理 **K** は **CI** に M_{\Box} , N_{\Box} , C_{\Box} , $Dual_{\Box}$ を加えて得られる
 - これらの代わりに M_{\Diamond} , N_{\Diamond} , C_{\Diamond} , $Dual_{\Diamond}$ を加えてもよい

M_{\Box}	$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\Box \varphi \rightarrow \Box \psi}$	M_{\Diamond}	$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\Diamond \varphi \rightarrow \Diamond \psi}$
N_{\Box}	$\Box \top$	N_{\Diamond}	$\neg \Diamond \perp$
C_{\Box}	$(\Box \varphi \wedge \Box \psi) \rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$	C_{\Diamond}	$\Diamond(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond \varphi \vee \Diamond \psi)$
$Dual_{\Box}$	$\Diamond \varphi \leftrightarrow \neg \Box \neg \varphi$	$Dual_{\Diamond}$	$\Box \varphi \leftrightarrow \neg \Diamond \neg \varphi$

(後の都合で, K 公理・Nec 規則ではなく上記を使う)

K も **Int** も Kripke 意味論をもつ:

Definition

- $\mathfrak{F} = (W, R)$ は Kripke フレーム
 $:\iff W \neq \emptyset, R \subseteq W \times W$
- $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ は Kripke モデル
 $:\iff (W, R)$ が Kripke フレーム, $V : \text{PropVar} \rightarrow \mathcal{P}(W)$

K と **Int** では R と V に関する条件が異なり, 充足可能性も異なるものを用いる (次頁).

K では R を任意の関係 \sqsubset とし, V にも特に条件を課さない.

Definition (K-Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \sqsubset, V)$ に対し, $\Vdash_{\mathfrak{M}}^K$ を以下で定める:

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K p \iff x \in V(p)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi \wedge \psi \iff x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi \ \& \ x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \psi$
- ...
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \Box \varphi \iff \forall y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \Diamond \varphi \iff \exists y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi)$

Int の Kripke 意味論

Int では R を任意の推移的・反射的な関係 \leq とする.

また V に以下の条件を課す:

$$x \leq x' \ \& \ x \in V(p) \implies x' \in V(p)$$

Definition

上を満たすものを 直観主義フレーム・モデル と呼ぶことにする

Definition (Int-Satisfaction Relation)

直観主義モデル $\mathfrak{M} = (W, \leq, V)$ に対し, $\Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}}$ を以下で定める:

$$x \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi \rightarrow \psi : \Longleftrightarrow \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \psi)$$

Fact (Persistence)

$$x \leq x' \ \& \ x \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi \implies x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi.$$

Definition (Validity)

- $\mathfrak{M} \models^\bullet \varphi \iff \forall x \in W (x \Vdash_{\mathfrak{M}}^\bullet \varphi)$
- $\mathfrak{F} \models^\bullet \varphi \iff \forall V ((\mathfrak{F}, V) \models^\bullet \varphi)$
- Kripke フレームのクラス \mathcal{C} に対して,
$$\mathcal{V}(\models^\bullet, \mathcal{C}) := \{\varphi \mid \forall \mathfrak{F} \in \mathcal{C} (\mathfrak{F} \models^\bullet \varphi)\}$$

Fact (Completeness)

- $\mathbf{K} = \mathcal{V}(\models^K, \mathcal{C}_K)$. \mathcal{C}_K は Kripke フレーム全体のクラス.
- $\mathbf{Int} = \mathcal{V}(\models^{\text{Int}}, \mathcal{C}_{\text{Int}})$. \mathcal{C}_{Int} は直観主義フレーム全体のクラス.

Intuitionistic Modal Logic と Constructive Modal Logic

\mathbf{K} の直観主義版を考えたい。そのモデルは Kripke モデルと直観主義モデルの fusion となるだろう。

Definition

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$ が以下を満たすとき Fusion モデル と呼ぶ:

- (W, \leq, V) が直観主義モデル, すなわち \leq は推移的かつ反射的で, $x \leq x' \ \& \ x \in V(p) \Rightarrow x' \in V(p)$.
- (W, \sqsubset, V) が Kripke モデル.

Fusion フレームについても同様に定める。

これに対しても充足可能性を定めたい。

Extrinsic Satisfaction Relation (1/2)

まず素朴に \Vdash^K と \Vdash^{Int} を組み合わせたものを考えよう.

Definition (Extrinsic Satisfaction Relation)

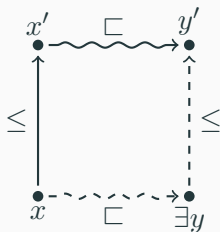
$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$ を Fusion モデルとする.

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi \rightarrow \psi : \Longleftrightarrow \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \psi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \Box \varphi : \Longleftrightarrow \forall y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \Diamond \varphi : \Longleftrightarrow \exists y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi)$

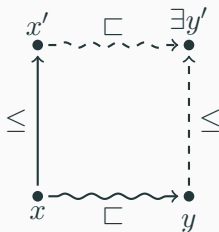
\Vdash^e は必ずしも persistency を持たず, 別途 \mathfrak{M} にフレーム条件を加えてやる必要がある (次頁). persistency をフレーム条件で外付けするので 外部的充足可能性 (extrinsic-) と呼ぶことにする.

Extrinsic Satisfaction Relation (2/2)

\models^e は必ずしも persistency を持たず、別途 \mathfrak{M} にフレーム条件を加えてやる必要がある。



\Box -p 条件



\Diamond -p 条件

\Box -p 条件が \Box -論理式 の persistency を,
 \Diamond -p 条件が \Diamond -論理式 の persistency を保証する。

Intrinsic Satisfaction Relation

フレーム条件で外付けするのではなく、充足可能性の定義自体を変えることで persistency を内蔵するアプローチもあり、これを内部的充足可能性 (intrinsic) と呼ぶことにする。

Definition (Intrinsic Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$ を Fusion モデルとする。

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi \rightarrow \psi : \Longleftrightarrow \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \psi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \Box \varphi : \Longleftrightarrow \forall x' \geq x \forall y' \sqsubset x' (y' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \Diamond \varphi : \Longleftrightarrow \forall x' \geq x \exists y' \sqsubset x' (y' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi)$

\Box/\Diamond でも直観主義側の到達可能関係 \leq を見ることによって、何もフレーム条件を加えなくても persistency が保証される。

Intrinsic vs. Extrinsic

\models^e と \models^i がそれぞれ妥当とする論理式の集合は 一致しない.

Definition

- \mathcal{C}_f : Fusion フレーム全体のクラス.
- $\mathcal{C}_{\text{box-p}}$: \Box -p 条件を満たす Fusion フレーム全体のクラス.
- $\mathcal{C}_{\text{dia-p}}$: \Diamond -p 条件を満たす Fusion フレーム全体のクラス.

Proposition

$$\mathcal{V}(\models^i, \mathcal{C}_f) \subsetneq \mathcal{V}(\models^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

Proof.

例えば以下の論理式が右辺に含まれ、また左辺に含まれない.

$$C_{\Diamond} : \Diamond(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \quad \square$$

Constructive Modal Logic

Wijesekera, Mendler & de Paiva らは構成主義の観点から C_\Diamond 自体を疑問視し、Constructive Modal Logic (CML) を作った。
代表的な CML として **CK** (今回は触れない) や **WK** がある:

Definition (WK)

$$\mathbf{WK} := \mathbf{Int} + M_\Box + N_\Box + C_\Box + M_\Diamond + N_\Diamond + \mathbf{FS1}.$$

ここで $\mathbf{FS1} := \Diamond(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Diamond\psi)$.

彼らは \Vdash^i を充足可能性として採用した。

Fact (Wijesekera 1990)

$$\mathbf{WK} = \mathcal{V}(\Vdash^i, \mathcal{C}_f).$$

Simpson の 6 条件

一方 Fischer Servi, Ewald, Plotkin & Stirling, Simpson らは「真の直観主義版 K 」といえるものを追い求めた。

Simpson は特に直観主義一階述語論理 (iFOL) との対応を重視し、 \Box には \forall 的な、 \Diamond には \exists 的な性質を求めた。

- \Box と \Diamond が独立 (not interdefinable) であるべきで、つまり Dual_{\Box} も Dual_{\Diamond} も定理として持つべきでない。
- 排中律を加えると古典版の K が得られるべき。
- 標準翻訳で iFOL とぴったり対応するべきで、少なくとも $\Box\neg\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\varphi$ と $\Diamond\neg\varphi \rightarrow \neg\Box\varphi$ を定理として持つべき。

さらに 3 つの条件 * を加えたものを Simpson の 6 条件 と呼ぶ。

*今回登場する論理は全て満たすので特に触れない

Intuitionistic Modal Logic (1/3)

Simpson は以下の理由から「**WK** は真の直観主義版 **K** とはいえない」と批判した:

- **WK** $\not\models \neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$ である.
- **WK** に排中律を加えても古典版の **K** が得られない.

一方 Simpson の 6 条件をすべて満たす論理として **IK** がある:

Definition

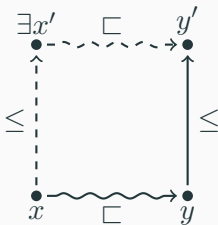
$$\mathbf{IK} := \mathbf{WK} + C_{\Diamond} + \text{FS2}.$$

ここで $\text{FS2} := (\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$.

IK やその拡張は Intuitionistic Modal Logic (IML) と呼ばれる.

Intuitionistic Modal Logic (2/3)

FS2 : $(\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$ がまさに $\neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$ に必要な公理で、これは以下のフレーム条件に対応する.



Definition

\mathcal{C}_{fs2} : 上を満たす Fusion フレーム全体のクラス.

Intuitionistic Modal Logic (3/3)

そして彼らは \Box -論理式 については persistency を内蔵し、
 \Diamond -論理式 についてはフレーム条件で persistency を外付けする、
 \Vdash^i と \Vdash^e のハイブリッドのような充足可能性を用いた。

Definition (Hybrid Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$ を Fusion モデルとする。

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi \rightarrow \psi : \Longleftrightarrow \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \psi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \Box \varphi : \Longleftrightarrow \forall x' \geq x \forall y' \sqsubset x' (y' \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \Diamond \varphi : \Longleftrightarrow \exists y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi)$

Fact (Fischer Servi 1984, Simpson 1994)

$$\mathbf{IK} = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{fs2}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

	WK	IK
充足可能性 フレームのクラス	\Vdash^i \mathcal{C}_f	\Vdash^h $\mathcal{C}_{fs2} \cap \mathcal{C}_{dia-p}$
C_\diamond を	もたない	もつ
\Box と \diamond が $\neg \diamond \varphi \rightarrow \Box \neg \varphi$ が 排中律で K に	独立 示せない ならない	独立 示せる なる

- 構成主義の観点から公理 C_\diamond を疑問視する \Rightarrow CML
- 標準翻訳で iFOL と対応することを重視する \Rightarrow IML
- 両者の要求は両立しない
- 一般に IML は CML の拡張になる (e.g. $WK \subsetneq IK$)

直観主義様相論理の状況を見た上で、以下の疑問が浮かぶ:

Problem

古典様相論理に慣れていると、 \Vdash^e ではなぜダメなのかと思う.
論理 $\mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$ は実際どうなっていて,
本当に Simpson の 6 条件を満たさないのか?

Problem

\Vdash^h の persistency には \Diamond -p 条件だけあればよいはず.
論理 $\mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$ は実際どうなっているのか?

これらの論理を調べると、IML とも CML とも言いがたいことが
分かった.

IML でも CML でもない論理

\Vdash^h と \Vdash^e が同値になる条件

実は $\Box\text{-p}$ 条件を課せば \Vdash^h と \Vdash^e が同値になる:

Proposition

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \Box, V)$ が $\Box\text{-p}$ と $\Diamond\text{-p}$ を満たすならば,
任意の $x \in W$, $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box\Diamond}$ で $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi \iff x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi$.

Corollary

$$\mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\Box\text{-p}} \cap \mathcal{C}_{\Diamond\text{-p}}) = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\Box\text{-p}} \cap \mathcal{C}_{\Diamond\text{-p}}).$$

よってまず $\mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\Diamond\text{-p}})$ を公理化し、カノニカルモデルを与えて議論してから、そこに何か公理を足すことで、カノニカルモデルに $\Box\text{-p}$ 条件を強制できないか考えることにした。

FIK (1/2)

IK から公理 FS2 を取り除いて得られる論理 $\mathbf{IK}^- := \mathbf{WK} + C_\Diamond$ がいかにも $\mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$ の公理化になっていそうだが、実はそうではないことが最近 Balbiani et al. によって示された。

Definition

$$\mathbf{FIK} := \mathbf{IK}^- + \text{wCD}.$$

ここで $\text{wCD} := \Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\Diamond\varphi \rightarrow \Box\psi) \rightarrow \Box\psi)$.

Theorem (Balbiani et al. 2024)

$$\mathbf{FIK} = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

Proof.

(\subseteq) 簡単. (\supseteq) カノニカルモデルを与える。 □

FIK は IK より真に弱い論理になる:

Proposition (Balbiani et al. 2024)

$$\mathbf{FIK} \subsetneq \mathbf{IK}.$$

公理 wCD は公理 FS2 を弱めたものといえる.

さらに以下が成立する.

Proposition (Balbiani et al. 2024)

FIK に排中律を加えると K が得られる.

Proposition (S.)

$$\mathbf{FIK} \not\models \neg \Diamond \varphi \rightarrow \Box \neg \varphi.$$

よって FIK は標準翻訳で iFOL と対応しないことになる.

Balbani らの **FIK** と，そのカノニカルモデルの構成を元にして， $\mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$ の公理化を得ることができた．

Definition

$$\mathbf{eIK}^- := \mathbf{IK}^- + \mathbf{CD}.$$

ここで $\mathbf{CD} := \Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \Box\psi)$.

Theorem (S.)

$$\mathbf{eIK}^- = \mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

Proof.

まずカノニカルモデルを用いて $\mathbf{eIK}^- = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$ を示す．
そして \Box -p を満たすモデルで \Vdash^h と \Vdash^e が一致することを使う． \square

公理 CD: $\Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \Box\psi)$ は明らかに公理 wCD:
 $\Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\Diamond\varphi \rightarrow \Box\psi) \rightarrow \Box\psi)$ の強化で、以下が示せる.

Proposition (S.)

$$FIK \subsetneq eIK^-.$$

しかし公理 FS2 : $(\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$ とは比較不能.

Proposition (S.)

$$eIK^- \subseteq IK \text{ でも } IK \subseteq eIK^- \text{ でもない.}$$

その他の性質については、概ね **FIK** と同様になっている.

Proposition (S.)

- eIK^- に排中律を加えると **K** が得られる.
- $eIK^- \not\vdash \neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$.

結論 (1/2)

	WK	FIK	IK	eIK ⁻
充足可能性 フレームのクラス	\Vdash^i \mathcal{C}_f	\Vdash^h $\mathcal{C}_{\text{dia-p}}$	\Vdash^h $\mathcal{C}_{\text{fs2}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}$	\Vdash^e $\mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}$
C_\diamond を	もたない	もつ	もつ	もつ
\Box と \diamond が $\neg\diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$ が 排中律で K に	独立 示せない ならない	独立 示せない なる	独立 示せる なる	独立 示せない なる

FIK と eIK⁻ は C_\diamond をもつという意味で CML とは言えない。
 一方 $\neg\diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$ が示せず、よって標準翻訳で iFOL と対応しないので、その意味で IML とも言えない。

- CML の要求も IML の条件も満たさない論理 **FIK** が、ちょうど **WK** と **IK** の間に割って入るようにして存在する.
- \Box と \Diamond を古典様相論理と同様に \Box のみで評価すると、**IK** と比較不能な **FIK** の拡張である **eIK** が得られ、同様に CML の要求も IML の条件も満たさない.
- Simpson の 6 条件では「排中律を加えて **K** が得られる」と「標準翻訳で iFOL と対応する」が分けられているが、実際に前者のみしか満たさない例が複数取れた.

ありがとうございました

cannorin.net/math/mlg60.pdf



補遺・参考文献

Definition

述語 \sqsubset と述語 V_p ($p \in \text{PropVar}$) を持つ一階言語 \mathcal{L}_{ST} を考える。
 $\varphi \in \mathcal{L}_{\sqsubset\Diamond}$ と自由変数 x に対して $\text{ST}_x(\varphi) \in \mathcal{L}_{\text{ST}}$ を以下で定める。

- $\text{ST}_x(\perp) = \perp, \text{ST}_x(p) = V_p(x)$
- $\text{ST}_x(\psi_1 \odot \psi_2) = \text{ST}_x(\psi_1) \odot \text{ST}_x(\psi_2)$ ($\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$)
- $\text{ST}_x(\Box\psi) = \forall y (x \sqsubset y \rightarrow \text{ST}_y(\psi))$ (y : fresh)
- $\text{ST}_x(\Diamond\psi) = \exists y (x \sqsubset y \wedge \text{ST}_y(\psi))$ (y : fresh)

Fact

$\mathbf{K} \vdash \varphi \iff$ 全ての古典 \mathcal{L}_{ST} -構造で $\forall x \text{ST}_x(\varphi)$ が妥当

Simpson はこれと同様な対応を IML と iFOL の間に求めた。

今回の発表は、未発表のサーベイ論文を元に行っている。

- Gisèle Fischer Servi. Axiomatizations for some intuitionistic modal logics. *Rendiconti del Seminario Matematico*, 42(3):179–194, 1984.
- Duminda Wijesekera. Constructive modal logics I. *Annals of Pure and Applied Logic*, 50(3):271–301, 1990.
- Alex K. Simpson. The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic. PhD thesis, University of Edinburgh, 1994.
- Michael Mendler and Valeria de Paiva. Constructive CK for Contexts. *Context Representation and Reasoning*, 13, 2005.
- Philippe Balbiani, Han Gao, Çiğdem Gencer, and Nicola Olivetti. A Natural Intuitionistic Modal Logic: Axiomatization and Bi-Nested Calculus. *LIPICs*, 88:13:1–13:21, 2024.